

An easy way to construct spacefillings

by William J. Gilbert

Résumé

Topologie Structurale #8, 1983

Une méthode simple pour la construction de polyèdres remplissant l'espace

Une méthode simple est donnée pour la construction de tous les carrelages du plan et de toutes les juxtapositions dont la région fondamentale, sous l'effet du groupe de symétrie de translations, consiste en une réunion de carrés unitaires ou cubes à faces ayant des coordonnées intégrales. La même méthode produira un certain nombre mais pas toutes les régions fondamentales de cette sorte sous l'effet de groupes de symétrie plus compliqués.

Abstract

Structural Topology #8, 1983

A straightforward method is given for constructing all the tilings of the plane and all the spacefillings whose fundamental region, under the symmetry group of translations, consists of a union of unit squares or cubes with faces having integral coordinates. The same method will produce some but not all of such fundamental regions under more complicated symmetry groups.

Introduction

Nous décrivons une méthode simple de construction de carrelage du plan et de juxtapositions à trois dimensions. Ces juxtapositions donneront aux architectes plus de liberté dans la conception d'habitations à haute densité en leur apportant des alternatives aux boîtes stériles conventionnelles.

Chaque tuile ou polyèdre remplissant l'espace consiste en une région fondamentale construite à partir de carrés unitaires ou cubes dont les répliques reproduites remplissent exactement le plan ou l'espace. Cette méthode facilite beaucoup la construction d'un grand nombre de polyèdres complexes remplissant l'espace sans vraiment avoir à y réfléchir. Nous démontrons également comment de tels polyèdres remplissant l'espace peuvent être modifiés et demeurés quand même des polyèdres qui remplissent l'espace.

Introduction

We describe a simple method for constructing tilings of the plane and spacefillings of three dimensional space. These spacefillings will give architects more freedom in designing high density housing by providing alternatives to the conventional sterile boxes.

Each tile or spacefiller consists of a fundamental region built up of unit squares or cubes whose translated replicas exactly fill the plane or space. The method makes it very easy to construct a large number of complex spacefillers with almost no thinking. We also show how such spacefillers can be modified and still remain spacefillers.

Nous nous concentrons principalement sur les façons de remplir l'espace dont les groupes de symétrie consistent en des translations pures parce que notre méthode produit toutes les régions fondamentales pour ces groupes. Toutefois, la même méthode peut être appliquée à des figures ayant d'autres groupes de symétrie et à des blocs de construction de base qui ne sont pas des carrés ou des cubes.

Carrelages du plan

Nous décrirons d'abord la méthode permettant de découvrir des carrelages du plan. La construction de polyèdres remplissant l'espace tridimensionnel constituera une généralisation de ceci.

Prenez un système rectangulaire coordonné dans le plan et divisez le plan en carrés unitaires. La méthode suivante construira une région fondamentale contenant un nombre n de ces carrés unitaires dont les reproductions rempliront le plan.

1. Déterminez la taille et l'inclinaison du treillis.

Choisissez deux nombres entiers positifs k et l tel que $kl = n$. Choisissez tout nombre entier h entre 0 et $k - 1$; ceci déterminera l'inclinaison du treillis (**Figure 1**).

Les images de l'original sous l'effet de toutes les translations de la région fondamentale constitueront le treillis généré par l'addition de $(k, 0)$ et (h, l) ; c'est-à-dire, qu'elle sera constituée des points $(ak + bh, bl)$ pour tous les nombres entiers a et b .

2. Étiquetez tous les carrés.

Les rectangles de l'aire n , qui sont de k unités de longueur par l unités de hauteur et dont le coin inférieur gauche repose à un point de la forme $(ak + bh, bl)$, remplissent le plan. Étiquetez les carrés n d'un de ces rectangles en utilisant les nombres de 1 à $n = kl$ (**Figure 2**). Étiquetez alors tous les autres rectangles de la même façon.

We mainly concentrate on spacefillings whose symmetry groups consists of purely translations because our method yields all such fundamental regions for these groups. However the same method may be applied to some figures with other symmetry groups and to basic building blocks that are not squares or cubes.

Tilings of the Plane

We first describe the method for finding tilings of the plane. The construction of three dimensional spacefillings will be a straightforward generalization of this.

Take a rectangular coordinate system in the plane and divide up the plane into unit squares. The following method constructs a fundamental region which contains n of these unit squares whose translates fill the plane.

1. Determine the size and skewness of the lattice.

Choose two positive integers k and l such that $kl = n$. Choose any integer h between 0 and $k - 1$; this will determine the skewness of the lattice (**Figure 1**).

The images of the origin under all the translations of the fundamental region will be the lattice generated under addition by $(k, 0)$ and (h, l) ; that is, it will consist of the points $(ak + bh, bl)$ for all integers a and b .

2. Label all the squares.

The rectangles of area n , which are k units long by l units high and whose lower left corner lies at a point of the form $(ak + bh, bl)$, fill the plane. Label the n squares of one of these rectangles using the numbers from 1 to $n = kl$ (**Figure 2**). Then label all the other rectangles in a similar way.

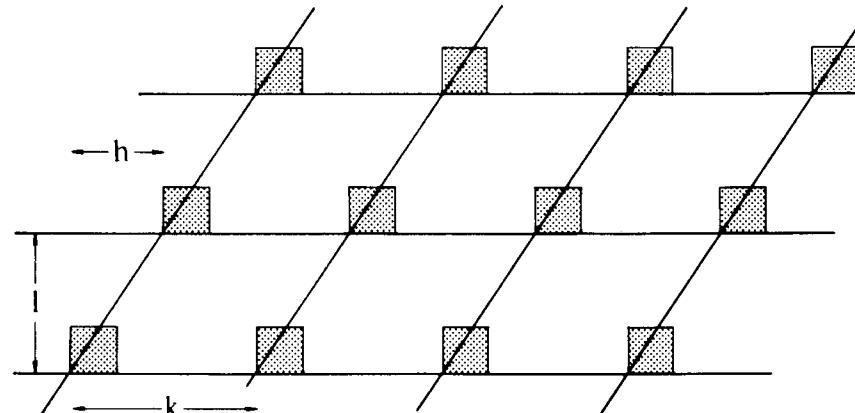


Figure 1. Determine the size and shape of the lattice • Déterminez la dimension et la forme du treillis.

3. Déterminez la forme de la région fondamentale.

Nous pouvons alors choisir une région fondamentale d'aire n de telle façon qu'elle contienne précisément un carré de chaque étiquette à partir de 1 jusqu'à n (**Figure 3**).

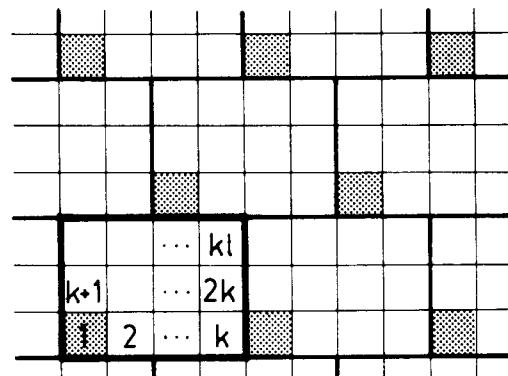


Figure 2. Label all the squares • Etiquetez tous les carrés.

Si cette région fondamentale est maintenant déplacée par toute combinaison intégrale des vecteurs $(k, 0)$ et (h, l) alors la réplique déplacée sera étiquetée de la même façon et toutes les répliques carreleront exactement le plan (**Figure 4**). Le groupe de symétrie translationnelle du carrelage sera le même que celui du treillis original. Par exemple, tous les carrelages à la **figure 6** ont le même groupe de symétrie.

On peut facilement effectuer des modifications mineures à une région fondamentale. Par exemple, la **figure 5** illustre la tuile originale que nous avons construite et les deux modifications que nous y avons apportées. Dans chaque cas, le carré étiqueté 1 a été retiré et remplacé par un autre ayant la même étiquette. Si un architecte construit une région fondamentale qui est approximativement de la forme désirée mais désire changer la position d'une ou deux unités pour des raisons fonctionnelles ou esthétiques, il apparaît tout à fait clair dans quelles positions ces unités peuvent être déplacées.

Comme les seules symétries dont nous nous sommes préoccupés jusqu'à maintenant n'étaient que des translations, les unités de construction de base ne doivent pas nécessairement être des carrés, mais pourraient tout aussi bien être n'importe quel rectangle ou parallélogramme.

3. Determine the shape of the fundamental region.

A fundamental region of area n can now be chosen in any way such that it contains precisely one square of each label from 1 to n (**Figure 3**).

1	2	3	4	1	2	3	4
11	12	9	10	11	12	9	10
7	8	5	6	7	8	5	6
3	4	1	2	3	4	1	2
9	10	11	12	9	10	11	12
5	6	7	8	5	6	7	8
1	2	3	4	1	2	3	4

Figure 3. Determine the shape of the fundamental region • Déterminez la forme de la région fondamentale.

If this fundamental region is now translated by any integral combination of the vectors $(k, 0)$ and (h, l) then the translated replica will be labeled in the same way and all the replicas will exactly tile the plane (**Figure 4**). The translational symmetry group of the tiling will be the same as that of the original lattice. For example, all the tilings in **Figure 6** have the same symmetry group.

Minor modifications to a fundamental region are easily made. For example **Figure 5** shows the original tile we constructed and two modifications of it. In each case the square labeled 1 has been removed and replaced with another one with the same label. If an architect constructs a fundamental region which is roughly of the desired form but wishes to change the position of one or two of the units for functional or aesthetic reasons, it is clear to which positions these units can be moved.

Since the only symmetries we have been concerned with till now have been translations, the basic building units do not have to be squares but could equally well be any rectangle or parallelogram.

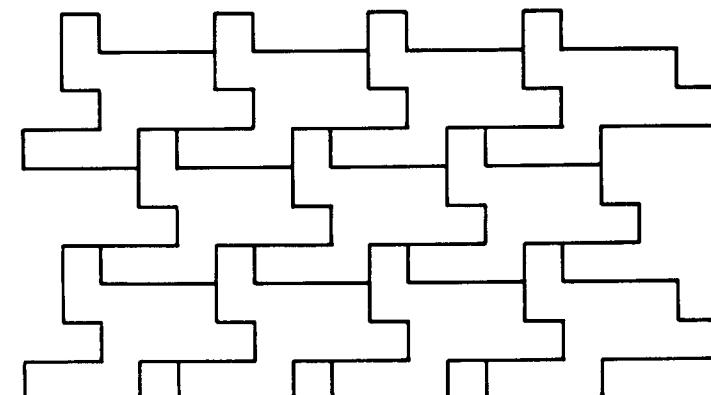


Figure 4. The tiling of the plane induced by the fundamental region using the parameters $k = 4$, $l = 3$ and $h = 2$. • Le carrelage du plan induit par la région fondamentale en utilisant les paramètres $k = 4$, $l = 3$ et $h = 2$.

7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12

Figure 5. Minor modifications to the fundamental region are simple to make ● Des modifications mineures à la région fondamentale sont simple à effectuer.

3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2

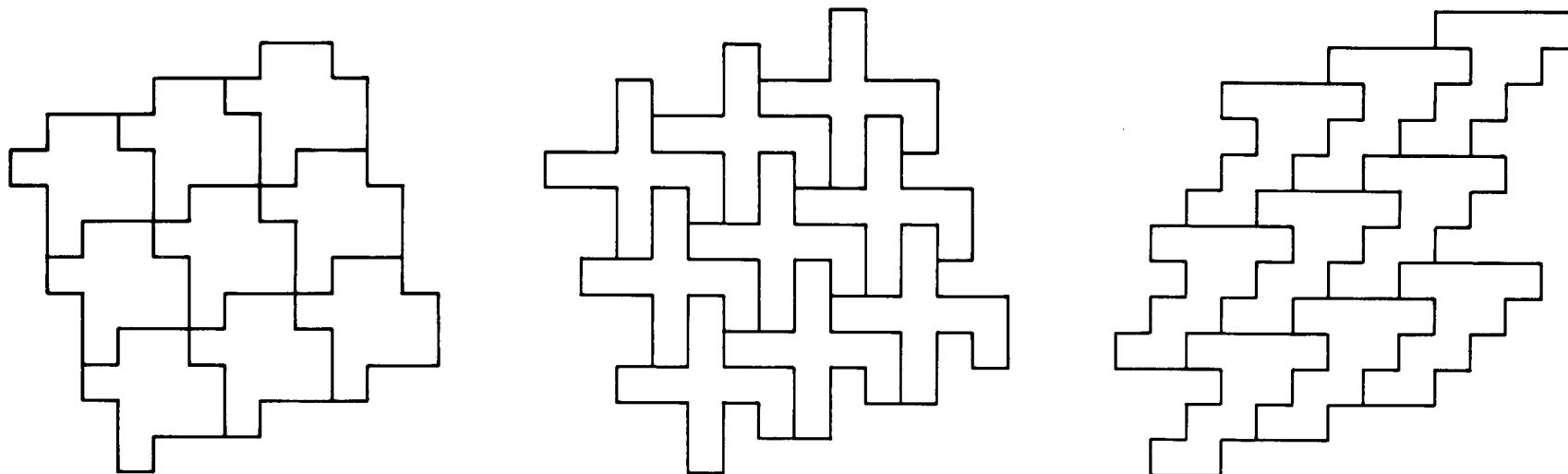


Figure 6. Three different tilings obtained by using the parameters $k = 10$, $l = 1$ and $h = 3$ ● Trois différents carrelages obtenus en utilisant les paramètres $k = 10$, $l = 1$ et $h = 3$.

Les régions fondamentales pour d'autres groupes de symétrie peuvent également être construites de la même façon. Par exemple, à la figure 7, un carré 3×3 est étiqueté de 1 à 9 et ses reproductions sont étiquetées selon le groupe de symétrie $p4$, généré par un quart de tour et un demi-tour. Voir Baracs 1982, Budden 1972 ou March et Steadman 1971 pour obtenir une description des autres groupes de symétrie plans. Une région fondamentale peut être identifiée comme n'importe lequel des neuf carrés étiquetés de 1 à 9; cette région produit un carrelage de tout le plan sous le groupe de symétrie $p4$.

La méthode de construction ci-dessus générera toutes les régions fondamentales similaires pour certains groupes de symétrie mais pas pour d'autres. La méthode produit de telles régions pour le groupe le plus simple $p1$, généré par deux translations indépendantes. Prenons T comme étant tout carrelage du plan par le groupe $p1$ où chaque tuile consiste en une union de carrés à n éléments dont les arêtes se situent le long de lignes de coordonnées intégrales. Il existe alors une région rectangulaire fondamentale sous le groupe $p1$ de l'aire n . D'où le fait qu'un tel carrelage T puisse être construit par la méthode décrite ci-haut en utilisant le groupe $p1$.

La preuve de ce résultat est la suivante. Étiquetez du nombre 1 un carré unitaire particulier et toutes ses transpositions sous $p1$. Continuez alors à partir de 1 dans une des directions coordonnées, disons la direction x , et étiquetez tous les carrés consécutivement jusqu'à ce que vous vous retrouviez à nouveau à 1, par exemple 1, 2, 3, ..., k , 1. L'étiquetage doit se répéter parce qu'il y a uniquement un nombre fini de carrés dans une région fondamentale et, en retournant en arrière si nécessaire, nous voyons que le carré 1 doit apparaître de nouveau dans la direction x avant que tous les autres carrés numérotés soient répétés. Maintenant, étiquetez toutes les transpositions par $p1$ avec les mêmes étiquettes. Les carrés étiquetés sont situés dans des rangées complètes, séparés par une distance l . Le rectangle $k \times l$ ayant le coin inférieur gauche étiqueté 1 constituera une région fondamentale pour le carrelage et $kl = n$. Si nous avions commencé l'étiquetage dans la direction y nous aurions pu obtenir un rectangle fondamentale de taille différente. Par exemple, à la figure 3, le rectangle fondamental pourrait être 4×3 ou il pourrait être 2×6 . Toutefois, il y a au plus deux choix de taille pour un tel rectangle fondamental.

Fundamental regions for other symmetry groups can also be constructed in a similar way. For example, in Figure 7 a 3×3 square is labeled from 1 to 9 and its images are labeled under the symmetry group $p4$, generated by a quarter turn and a half turn. See Baracs 1982, Budden 1972 or March and Steadman 1971 for a description of the other plane symmetry groups. A fundamental region can be taken to be any nine squares labeled from 1 to 9; this region induces a tiling of the whole plane under the symmetry group $p4$.

The above method of construction will generate all such fundamental regions for certain symmetry groups but not for others. The method yields all such regions for the simplest group $p1$, generated by two independent translations. Let T be any tiling of the plane under the group $p1$ where each tile consists of a union of n unit squares whose edges lie along integral coordinate lines. Then there exists a rectangular fundamental region under the group $p1$ of area n . Hence every such tiling T can be constructed by the method given above using the group $p1$.

The proof of this result proceeds as follows. Label one particular unit square and all its translates under $p1$ as 1. Then continue from 1 in one of the coordinate directions, say the x -direction, and label all the squares consecutively until 1 is reached again, say 1, 2, 3, ..., k , 1. The labeling must repeat because there are only a finite number of squares in a fundamental region and, going back if necessary, we see that the square 1 must appear again in the x -direction before any of the other numbered squares are repeated. Now label all the translates under $p1$ with the same labels. The labeled squares lie in complete rows distance l apart. The $k \times l$ rectangle with lower left corner labeled 1 will be a fundamental region for the tiling and $kl = n$. If we started labeling in the y -direction we may have obtained a different size fundamental rectangle. For example, in Figure 3, the fundamental rectangle could be 4×3 or it could be 2×6 . However there are at most two choices for the size of such a fundamental rectangle.

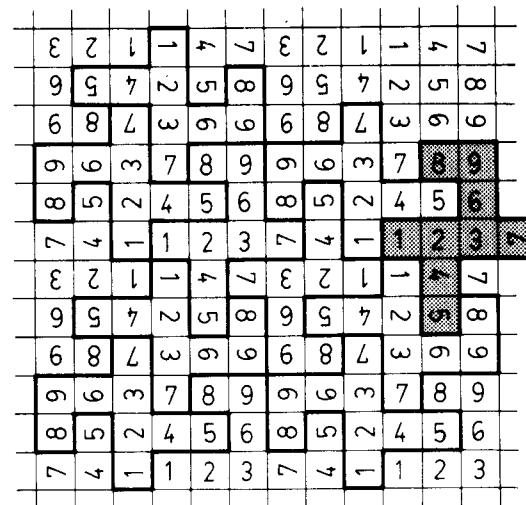


Figure 7. A tiling of the plane with symmetry group $p4$ • Un carrelage du plan avec groupe de symétrie $p4$.

Toutefois, la méthode ne permettra pas de construire toutes les régions fondamentales pour le groupe de symétrie $p4$. Par exemple, le carrelage à la **figure 8** ne contient pas de rectangle fondamental 1×5 . Dans ce cas, il existe une région fondamentale rectangulaire mais elle n'est pas le résultat de la réunion de carrés unitaires; le rectangle ombragé de couleur foncée de taille $10 \times 5/2$ en est un exemple.

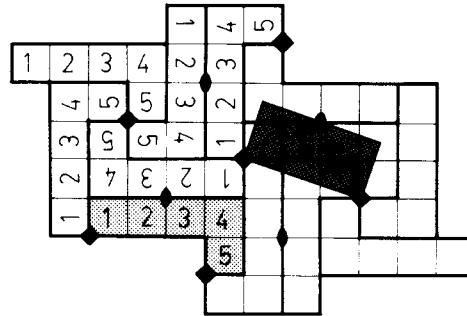


Figure 8. A tiling of the plane with symmetry group $p4$ which cannot be constructed using the method in the text. The black diamonds are centres of half turn symmetries. The dark rectangle is a fundamental region but there is no rectangular fundamental region composed of unit squares. ● Un carrelage du plan avec groupe de symétrie $p4$ qui ne peut être construit en utilisant la méthode exposée dans le texte. Les losanges noirs sont les centres des symétries de quart-de-tour et les ovales noirs sont les centres des symétries de demi-tour. Le rectangle foncé constitue la région fondamentale, mais il n'y a pas de région fondamentale rectangulaire composée de carrés unitaires.

Des polyèdres tridimensionnels remplissant l'espace

Trois polyèdres tridimensionnels remplissant l'espace, constitués de la réunion de cubes à n éléments, peuvent être construits de la même façon que les carrelages plans. Choisissez 6 paramètres à nombres entiers h, i, j, k, l, m comme suit. Les nombres entiers positifs k, l et m doivent satisfaire $k/m = n$, le volume de la région fondamentale. Choisissez h, i et j de telle sorte que $0 \leq h \leq k - 1, 0 \leq i \leq k - 1$ et $0 \leq j \leq l - 1$; ces paramètres déterminent l'inclinaison du treillis. Le polyèdre remplissant l'espace sera invariant sous les translations dans les directions $(k, 0, 0)$, $(h, l, 0)$ et (i, j, m) . Les boîtes de dimension $k \times l \times m$ ayant leurs coins gauches inférieurs aux points

$$(ak + bh + ci, bl + cj, cm)$$

pour les nombres entiers a, b et c , tel que démontré à la **figure 9**, rempliront l'espace. Étiquetez les n cubes unitaires dans chacune de ces boîtes de la même façon en utilisant les nombres de 1 à $n = k/m$. Comme dans le cas à deux dimensions, une région fondamentale de volume n peut être choisie à condition uniquement qu'elle contienne précisément un cube unitaire de chaque étiquette. Par exemple, la **figure 10** illustre la construction d'une région fondamentale de volume 12 tandis que la **figure 11** illustre cinq de ces régions fondamentales en position dans l'espace.

Pour aider à la construction de ces grilles, on devrait noter que chaque cube étiqueté par un nombre donné est toujours entouré par les mêmes six nombres orientés de la même façon. Dès lors, il est suffisant de dessiner $m + 1$ niveaux consécutifs de la grille pour déterminer quels nombres sont au-dessus ou au-dessous de n'importe quel cube.

However the method will not construct all the fundamental regions for the symmetry group $p4$. For example, the tiling in **Figure 8** contains no 1×5 fundamental rectangle. In this case there is a rectangular fundamental region but it is not a union of unit squares; the darkly shaded rectangle of size $\sqrt{10} \times \sqrt{5}/2$ is an example.

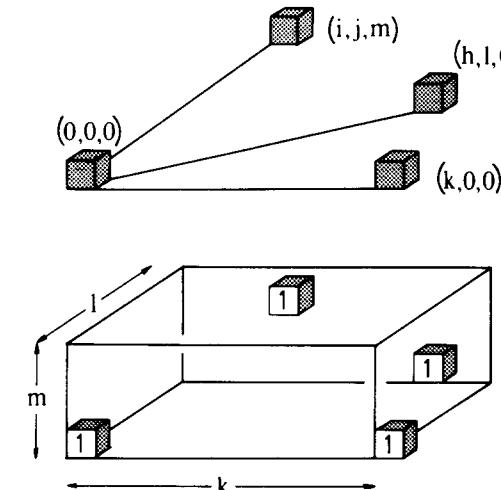


Figure 9. The construction of the three dimensional lattice. ● La construction du treillis tridimensionnel.

Three Dimensional Spacefillings

Three dimensional spacefillers consisting of a union of n unit cubes can be constructed in a similar way to the plane tilings. Choose six integer parameters h, i, j, k, l, m as follows. The positive integers k, l and m must satisfy $k/m = n$, the volume of the fundamental region. Choose h, i and j so that $0 \leq h \leq k - 1, 0 \leq i \leq k - 1$ and $0 \leq j \leq l - 1$; these parameters determine the skewness of the lattice. The spacefilling will be invariant under translations in the directions $(k, 0, 0)$, $(h, l, 0)$ and (i, j, m) . The boxes of size $k \times l \times m$ with their lower left front corners at the points

$$(ak + bh + ci, bl + cj, cm)$$

for integers a, b and c as shown in **Figure 9**, will fill space. Label the n unit cubes in each of these boxes in the same way using the numbers from 1 to $n = k/m$. As in the two dimensional case, a fundamental region of volume n can now be chosen in any way so that it contains precisely one unit cube of each label. For example **Figure 10** shows the construction of a fundamental region of volume 12 while **Figure 11** shows five of these fundamental regions in position in space.

As an aid to constructing these grids it should be noted that each cube labeled with a given number is always surrounded by the same six numbers oriented in the same way. Hence it is sufficient to draw $m + 1$ consecutive levels of the grid to determine which numbers are above and below any given cube.

12	7	8	9	10	11	12	7
6	1	2	3	4	5	6	1
10	11	12	7	8	9	10	11

3	4	5	6	1	2	3	4
7	8	9	10	11	12	7	8
1	2	3	4	5	6	1	2

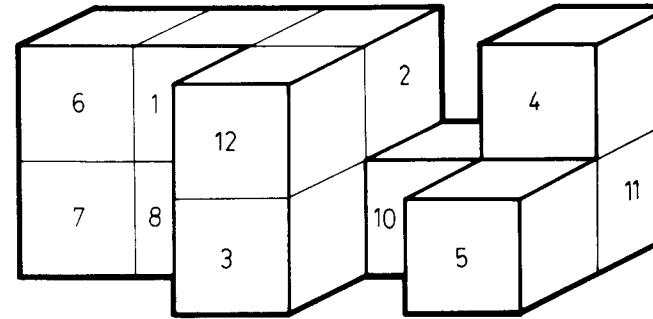


Figure 10. Two consecutive levels of the grid determined by the parameters $k = 6, l = 2, m = 1, h = 4, i = 1, j = 1$ and a spacefilling constructed from this grid • Deux niveaux consécutifs de la grille déterminée par les paramètres $k = 6, l = 2, m = 1, h = 4, i = 1, j = 1$ et un polyèdre remplissant l'espace construit à partir de cette grille.

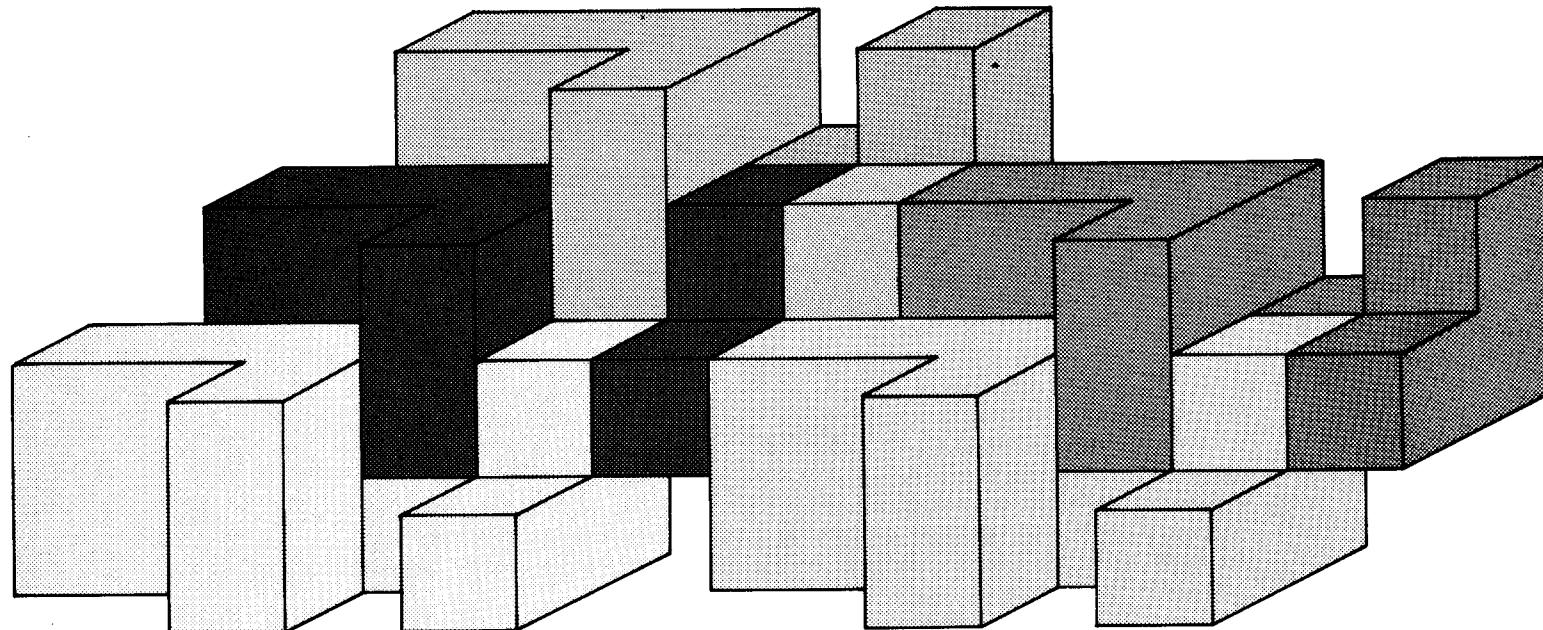


Figure 11. Five replicas of the spacefiller in position in three dimensional space • Cinq répliques du polyèdre remplissant l'espace tridimensionnel.

Comme dans le cas à deux dimensions, on peut démontrer que toutes les régions fondamentales possibles, dont les faces sont situées le long des plan de coordonnées intégraux et dont le groupe de symétrie est le groupe triclinique $P1$, généré par trois translations indépendantes, peuvent être construites en utilisant la technique ci-dessus. Pour toute région fondamentale donnée, il peut y avoir jusqu'à trois différentes possibilités pour les paramètres k, l et m , de la boîte initiale $k \times l \times m$.

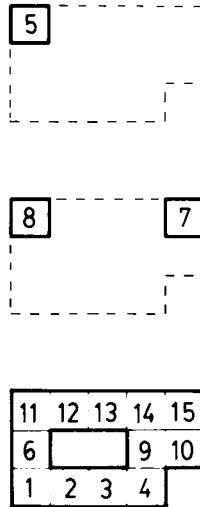
Il est aussi possible d'utiliser la méthode de construction de régions fondamentales pour d'autres groupes de symétrie, en utilisant peut-être des volumes unitaires de formes différentes comme blocs de construction. Mais, comme dans le cas planaire, cela peut ne pas nous amener à toutes les régions possibles.

As in the two dimensional case, it can be shown that all possible fundamental regions, whose faces lie along integral coordinate planes and whose symmetry group is the triclinic group $P1$, generated by three independent translations, can be constructed using the above technique. For any given fundamental region, there may be up to three different possibilities for the parameters k, l and m , of the initial $k \times l \times m$ box.

It is also possible to use the method to construct fundamental regions for other symmetry groups, perhaps using different shaped unit volumes as building blocks. But, as in the planar case, this may not lead to all possible regions.

Conclusion

Les architectes ne devraient pas se laisser intimider par l'exotisme des polyèdres remplissant l'espace qui suscitent présentement un intérêt mathématique parce que même les simples groupes de symétrie «translationnels» produisent des polyèdres remplissant l'espace extrêmement complexes. Par exemple, au premier coup d'œil, la région de la figure 12 ne semble pas devoir remplir l'espace, mais elle fut construite très simplement en utilisant la méthode décrite ci-haut.



Conclusion

Architects need not feel intimidated by the exotic spacefillers of current mathematical interest because even the simple translational symmetry groups yield surprisingly intricate spacefillers. For example, at first glance, the region in **Figure 12** does not appear as if it would fill space, but it was constructed very easily using the method described above.

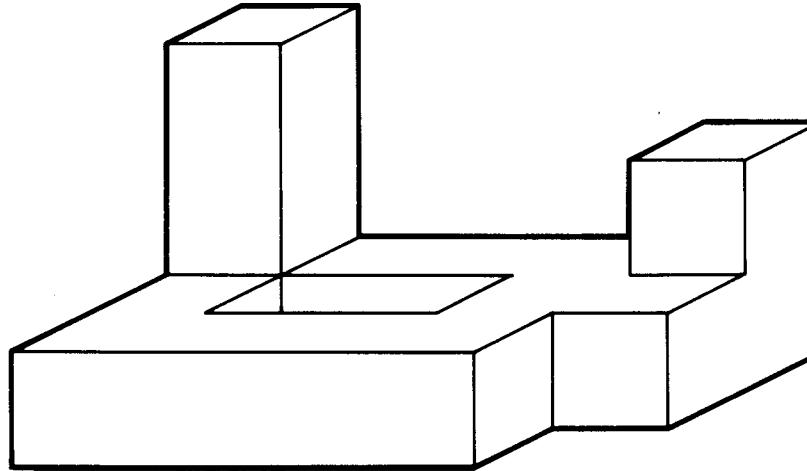


Figure 12. A spacefiller derived from the parameters $k = 5$, $l = 3$, $m = 1$, $h = 1$, $i = 3$ and $j = 1$. The plans of the three levels are shown at the left. In fact in this example the value of h is not used in the construction of the spacefiller but only determines how the different spacefillers fit together • Un polyèdre remplissant l'espace dérivé des paramètres $k = 5$, $l = 3$, $m = 1$, $h = 1$, $i = 3$ et $j = 1$. Les plans des trois niveaux sont illustrés à gauche. En fait, dans cet exemple la valeur de h n'est pas utilisée dans la construction du polyèdre remplissant l'espace mais détermine seulement comment les différents polyèdres remplissant l'espace s'intègrent entre eux.

References

- J. Baracs, *Symmetry Groups in Plane*, Structural Topology, to appear.
F.J. Budden, *The Fascination of Groups*, Cambridge University Press, 1972.
L. March & P. Steadman, *The Geometry of Environment*, RIBA Publications, London, 1971.

Author's address:

Department of Pure Mathematics
University of Waterloo
Waterloo, Ontario
N2L 3G1