Reprinted with permission from *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 (1950) 918–920.

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Les i-carrés dans une variété grassmannienne.*

Note de M. **Wu Wen-Tsün**, présentée par M. Élie Cartan.

1. L'anneau de coefficients de l'anneau de cohomologie $H^*(M)$ d'un espace M sera dans ce qui suit exclusivement l'anneau des entiers mod 2.

Soient W^i, $i \geq 0$ quelconque, les W-classes (classes caractéristiques de Stiefel-Whitney) d'une s. f. s. (structure fibrée sphérique) avec la convention $W^0 = 1$ (classe unité de la base), et $W^i = 0$ si $i > m$, $m - 1$ étant la dimension de la fibre sphère. Nous allons démontrer la formule suivante :

$$Sq^r W^s = \sum_t C^t_{s-r+t-1} W^{r-t} W^{s+t} \qquad (s \geq r > 0), \tag{1}$$

où C^q_p = coefficient binomial pour $p \geq q > 0$, $= 0$ pour $p < q > 0$, et $= 1$ pour $p = -1$ et $q = 0$ (tous sont réduits mod 2).

Signalons d'abord quelques conséquences de cette formule : définissons, dans la base, un système de classes U^p ($p \geq 0$ quelconque) par les équations suivantes :

$$W^i = \sum_p Sq^{i-p} U^p, \qquad i \geq 0 \text{ quelconque}; \tag{2}$$

nous les appellerons les *classes canoniques* de la structure considérée. Si la s. f. s. est en particulier la structure tangente associée à une variété différentiable M de dimension m, on voit, en comparant avec les équations (1) et (2) d'une Note précédente [1], que le nom de classes canoniques est justifié; de plus, parmi toutes les s. f. s. (aux fibres S^{m-1}) sur la variété M comme base, la structure tangente de M possède la propriété remarquable suivante :

$$U^p = 0 \qquad \text{pour} \quad 2p > m, \tag{3}$$

De (1) et (3) on déduit :

a. Pour une structure orientable on a $U^{2k+1} = 0$, k quelconque, ce qui généralise un théorème de H. Cartan [1],

b. Pour la structure tangente d'une variété différentiable de dimension m, on a $W^1 W^{m-2} = 0$ si $m = 4k$; $W^1 W^{m-3} = 0$; $W^1 W^{m-1} = 0$ si $m = 4k+1$; $W^m = W^1 W^{m-1}$ si $m = 4k+2$; $W^1 W^{m-1} = 0$, $W^{m-1} = W^1 W^{m-2}$ si $m = 4k+3$.

(1) *Comptes rendus*, **230**, 1950, p. 508-511.

2. Soit $G_{n,m}$ la variété grassmannienne des m-éléments linéaires dans un espace euclidien R^{n+m} de dimension $n+m$ passant par l'origine de R^{n+m}. On sait (²) que l'*anneau* $H^*(G_{n,m})$ est engendré par les classes W^i de la s. f. s. $\mathcal{G}_{n,m}$ (fibres S^{m-1}) de base $G_{n,m}$ canoniquement associée à $G_{n,m}$. De plus, comme m'a fait remarquer H. Cartan :

Lemme 1. — *Soit* $\varphi_p(W^i)$ *un polynôme non identiquement nul en* $W^1, \ldots W^m$ *tel que pour chaque terme* $W^{i_1} \ldots W^{i_k}$ *de ce polynôme on ait* $i_1 + \ldots + i_k = p \leqq n$. *Alors* $\varphi_p(W^i)$ *est un élément non nul de* $H^*(G_{n,m})$.

Supposons alors que R^{n+m} soit le produit de deux espaces euclidiens $R_j^{n_j+m_j}$ de dimension $n_j + m_j$ $(j=1, 2)$. Soient G_{n_j,m_j} $(j=1, 2)$ les variétés grassmanniennes définies respectivement dans $R_j^{n_j+m_j}$. Pour $X_j \in G_{n_j,m_j}$ soit $X \in G_{n,m}$ le joint de X_1 et X_2, on a alors une application canonique

$$f: \quad G_{n_1,m_1} \times G_{n_2,m_2} \to G_{n,m}$$

définie par $f(X_1 \times X_2) = X$. En désignant par W_j^i $(j=1, 2)$ respectivement les W-classes des structures $\mathcal{G}_{n_j,m_j}$, on a :

Lemme 2. — *Le type d'homologie mod 2 de f est déterminé par* (³) :

$$f^* W^i = \sum_j W_1^j \otimes W_2^{i-j} \qquad (i \geqq 0 \text{ quelconque})$$

Comme conséquence des lemmes 1 et 2, en conservant les notations, on a :

Lemme 3. — *Pour* $p \leqq n_1$ *et* n_2, $\varphi_p(W^i)$ *est un élément non nul de* $H^*(G_{n,m})$ *si et seulement si* $f^* \varphi_p(W^i)$ *est un élément non nul de* $H^*(G_{n_1,m_1} \times G_{n_2,m_2})$.

3. *Démonstration de* (1). — Nous poserons

$$\varphi_{r,s}(W^i) = Sq^r W^s + \sum_t C_{s-r+t-1}^t W^{r-t} W^{s+t}.$$

La formule (1), ou, ce qui revient au même, la formule $\varphi_{r,s}(W_j^i) = 0$, étant évidente pour $m=1$, nous supposerons par induction qu'elle est exacte pour les structures dont les fibres sphères ont une dimension $< m-1$, où $m > 1$. Soient maintenant W^i, W_j^i respectivement les W-classes des structures $\mathcal{G}_{n,m}$ et $\mathcal{G}_{n_j,m_j}$ $(j=1, 2)$ où $n = n_1 + n_2$, $n_j \geqq r+s$, $m_1 = m-1$, $m_2 = 1$. De la formule $f^* Sq^i = Sq^i f^*$, d'un théorème de H. Cartan (⁴), et du lemme 2 du

(²) S. Chern, *Annals of Math.*, 49, 1948, p. 362-372.

(³) Nous remarquons que le théorème de Whitney sur le produit de deux structures fibrées sphériques est une conséquence de ce lemme dont la démonstration est donnée dans ma Thèse, Strasbourg, 1949.

(⁴) *Comptes rendus*, 230, 1950, p. 425-427.

paragraphe 2, on déduit

$$f^{\star}\varphi_{r,s}(W^i) = \varphi_{r,s}(W_1^2)\otimes 1 + \varphi_{r,s-1}(W_1^i)\otimes W_2^1 + \varphi_{r-1,s-1}(W_1^i)\otimes (W_2^1)^2.$$

D'après l'hypothèse d'induction on a donc $f^{\star}\varphi_{r,s}(W^i) = 0$ et par conséquent $\varphi_{r,s}(W^i) = 0$ d'après le lemme 3. La structure $\mathcal{G}_{n,m}$ étant universelle pour n assez grand, on a $\varphi_{r,s}(W^i) = 0$ pour une s. f. s. quelconque. La formule (1) est ainsi démontrée par induction.

Soient en particulier W^i les W-classes de la structure $\mathcal{G}_{n,m}$ sur la base $G_{n,m}$. L'anneau $H^{\star}(G_{n,m})$ étant engendré par les classes W^i, on voit que la formule (1) détermine complètement les i-carrés dans $G_{n,m}$ en les exprimant comme des polynômes en W^i.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **230**, p. 918-920, séance du 6 mars 1950.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
135687-50 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.