Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 22–24 0010–2571/82/000122–03$01.50+0.20/0

Une variété de dimension 4 avec forme d'intersection paire et signature – 8

NATHAN HABEGGER

Quelles sont les formes bilinéaires symétriques unimodulaires qui peuvent être la forme d'intersection d'une variété close de dimension 4? Il résulte du théoréme de Rochlin [1] que la signature d'une variété close simplement connexe de dimension 4 et dont la forme d'intersection est paire est divisible par 16. Dans cette note, nous présentons un exemple qui montre que l'hypothèse de simple connectivité est indispensable dans l'énoncé ci-dessus.

Le théorème de Rochlin dit que la signature d'une variété close de dimension 4 et presque parallélisable est divisible par 16. D'autre part une variété orientable M de dimension 4 est presque parallélisable si et seulement si sa deuxième classe de Stiefel–Whitney $w_2(M) \in \mathrm{H}^2(M;\ \mathbf{Z}_2)$ est nulle. Cette condition peut encore s'exprimer à l'aide de la forme d'intersection mod 2 comme suit: Soit $u_2 = u_2(M) \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$, la deuxième classe de Wu définie par la formule $\langle u_2 \cdot x, [M] \rangle = \langle \mathrm{Sq}^2(x), [M] \rangle$ pour tout $x \in \mathrm{H}^{n-2}(M; \mathbf{Z}_2)$. On rappelle la formule de Wu, $w = \mathrm{Sq}(u)$, où $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$ et $u = 1 + u_1 + u_2 + \cdots$ sont respectivement les classes totales de Stiefel-Whitney et de Wu. Pour la suite, M désigne maintenant une variété close orientable de dimension 4. On a alors $w_1(M) = 0$ et la formule de Wu donne $w_2(M) = u_2(M)$. On a donc la formule $w_2 \cdot x = \mathrm{Sq}^2(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$. Ainsi pour M close orientable de dimension 4, on a $w_2 = 0$ si et seulement si $x^2 = 0$ pour tout $x \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$.

Soit $T^2 = T^2(M; \mathbf{Z})$ le sous-groupe de torsion de $\mathrm{H}^2 = \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z})$ et soit $\rho : \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$ la réduction mod 2. Les sous-espaces $\rho(T^2)$ et $\rho(\mathrm{H}^2)$ sont mutuellement orthogonaux (pour le produit mod 2). En fait, pour des raisons de dimension (cf. [2]) chacun est le complément orthogonal de l' autre. Il s'ensuit que

(i) $w_2(M) \in \rho(\mathrm{H}^2)$

(ii) $w_2(M) \in \rho(T^2) \Leftrightarrow$ la forme d'intersection sur H^2/T^2 est paire.

Ainsi pour M^4 simplement connexe ($T^2 = 0$) les conditions

(a) M a forme d'intersection paire ($w_2 \in \rho(T^2)$)

(b) M est presque parallélisable ($w_2 = 0$)

sont équivalentes.

On trouve ainsi comme corollaire du théorème de Rochlin l'énoncé du début. Si M de dimension 4 est simplement connexe et possède une forme d'intersection paire, alors sa signature est divisible par 16. Mais en général, la condition (a) ci-dessus est plus faible que (b) comme on peut voir sur l'exemple suivant:

Soit $\tilde{M} = S^2 \times S^2$ et $M = \tilde{M}/\mathbf{Z}_2$ où $\mathbf{Z}_2$ agit sur $\tilde{M}$ par $(x, y) \to (-x, -y)$. On a rang $\mathrm{H}^2(M) + 2 = \chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = 2$ donc rang $\mathrm{H}^2(M) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{H}^2(M) = T^2(M)$. D'autre part, à partir du plongement diagonal $S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2$ on obtient par passage aux quotients un plongement $\mathbf{R}P^2 \overset{i}{\hookrightarrow} M$ avec self-intersection 1. Si $x \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$ est la duale de Poincaré de $i_*[\mathbf{R}P^2] \in \mathrm{H}_2(M; \mathbf{Z}_2)$, on a $w_2 \cdot x = x^2 = 1$ et donc $w_2 \neq 0$.

La variété ci-dessus a signature zéro, puisque $\mathrm{H}^2/T^2 = 0$. Cependant, sa construction nous a donné l'espoir qu'il puisse exister une variété avec forme d'intersection paire et signature $\equiv 8 \bmod 16$. Voici un tel exemple: Soit M l'hypersurface de degré 4 dans $\mathbf{C}P^3$ donnée par l'équation $Z_0^4 + Z_1^4 + Z_2^4 + Z_3^4 = 0$. On définit une involution sur $\mathbf{C}P^3$ par $(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) \mapsto (\bar{Z}_1, -\bar{Z}_0, \bar{Z}_3, -\bar{Z}_2)$. On vérifie aisément que c'est une involution sans points fixes qui laisse $\tilde{M}$ invariant. Par passage aux quotients on obtient un plongement $M = \tilde{M}/\mathbf{Z}_2 \xrightarrow{i} Q = \mathbf{C}P(3)/\mathbf{Z}_2$. On vérifie aisément que M est orientable avec fibré normal $v(i)$ non-orientable.

Nous allons vérifier que la forme d'intersection de M est paire, signature$(M) = -8$, rang $\mathrm{H}^2(M : \mathbf{Z}) = 10$. D'après la classification des formes symétriques unimodulaires paires indéfinies (cf [4]), on obtient la

PROPOSITION. *Toute forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire telle que* $|\text{signature}| \leq 4/5$ *rang est la forme d'intersection d'une variété close de dimension* 4.

La variété $\tilde{M}$ a les propriétés suivantes (cf. [3]). $\tilde{M}$ est simplement connexe, rang $\mathrm{H}^2(\tilde{M}; \mathbf{Z}) = 22$, signature $(\tilde{M}) = -16$. On a $-16 = \text{signature } (\tilde{M}) = \langle p_1(\tilde{M})/3, [\tilde{M}]\rangle = \langle p_1(M)/3, 2[M]\rangle = 2$ signature (M), donc signature $M = -8$. D'autre part rang $\mathrm{H}^2(M) + 2 = \chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = \frac{1}{2}$ (rang $\mathrm{H}^2(\tilde{M}) + 2) = 12$ et donc rang $\mathrm{H}^2(M) = 10$.

Il reste à voir que la forme d'intersection de M est paire. D'après ce qui précède, il suffit de voir que $w_2(M) \in \rho(T^2(M, \mathbf{Z}))$. De l'équation fibré $T_M + v(i) = i^*T_Q$ déduit de l'inclusion $M \xrightarrow{i} Q$ on tire $w_2(M) + w_2(v(i)) = i^*w_2(Q)$. Nous allons montrer que $\mathrm{H}^2(Q, \mathbf{Z}_2) = \rho(T^2(Q, \mathbf{Z}))$ et $w_2(v(i)) = 0$. Il s'ensuit que $w_2(M) = i^*w_2(Q) \in i^*\rho(T^2(Q, \mathbf{Z}) \subset \rho(T^2(M, \mathbf{Z}))$.

Soit $\mathbf{C}P(1) \hookrightarrow \mathbf{C}P(3)$ donné par $Z_2 = Z_3 = 0$. Par passage aux quotients, on obtient $\mathbf{R}P^2 = \mathbf{C}P(1)/\mathbf{Z}_2 \overset{i}{\hookrightarrow} Q$. Rappelons que pour $\tilde{X} \to X$ un revêtement à deux feuilles, on a la suite exacte courte de complexes de chaînes: $0 \to C(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \to C(\tilde{X}) \otimes \mathbf{Z}_2 \to C(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \to 0$. On obtient donc le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_2(CP(1); \mathbf{Z}_2) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\wr"] & H_2(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_1(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_1(CP(1); \mathbf{Z}_2) = 0 \arrow[d] \\
\mathrm{H}_2(CP(3); \mathbf{Z}_2) \arrow[r] & \mathrm{H}_2(Q; \mathbf{Z}_2) \arrow[r] & \mathrm{H}_1(Q; \mathbf{Z}_2) \arrow[r] & \mathrm{H}_1(CP(3); \mathbf{Z}_2) = 0
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que $H_2(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}_2) \to H_2(Q; \mathbf{Z}_2)$ est un isomorphisme. Par dualité, $H^2(Q; \mathbf{Z}_2) \to H^2(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}_2)$ est un isomorphisme. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}(H_1(Q;\mathbf{Z}),\mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^2(Q;\mathbf{Z}) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & H^2(Q;\mathbf{Z}_2) \arrow[d, "\wr"] \\
\operatorname{Ext}(H_1(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z}),\mathbf{Z}) \arrow[r, "\simeq"] & H^2(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z})) \arrow[r, "\rho", "\simeq"'] & H^2(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

établit que $\rho(T^2(Q; \mathbf{Z})) = H^2(Q; \mathbf{Z}_2)$.

Comme $j_*[\mathbf{R}P^2]$ engendre $H_2(Q; \mathbf{Z}_2)$ et que l'intersection de $\mathbf{R}P^2$ et M est zéro ($\tilde{M}$ est de degré 4), il s'ensuit que $i_*[M] = 0$ dans $H_4(Q; \mathbf{Z}_2)$. La classe d'Euler du fibré normal $v(i)$ est donc aussi triviale, ce qui montre que $w_2(v(i)) = 0$.

Je voudrais remercier M. Michel Kervaire pour l'intérêt qu'il a pris pendant l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

[1] MILNOR, J. and KERVAIRE, M., *Bernoulli Numbers, Homotopy Groups and a Theorem of Rochlin*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1958) 454–458.

[2] MASSEY W. S. and PETERSON, F. P., *On the dual Stiefel-Whitney classes of a manifold*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) *8* (1963), 1–13.

[3] KULKARNI R. and WOOD, J., *Topology of Nonsingular Complex Hypersurfaces*, Advances in Mathematics *35*, 239–263 (1980).

[4] SERRE, J. P. *Cours d'Arithmétique*, Presse Universitaire de France (1970).

Section de Mathematiques
de l'Université de Genève
2–4, rue du Lièvre
CH–1211 Genève 24

Recu le 3 septembre 1981