Le théorème de Cobham et les suites régulières

par Jason P. Bell

Une suite est dite k-*automatique* si son n^{e} terme est engendré par une machine à états finis, lisant en entrée le développement de n en base k.

Exemples :

La suite de Thue-Morse.

$$0110100110010110100 10\cdots$$

Cette suite est 2-automatique.

p.e., n=13, $[n]_2 = 1101$. $TM(1101) = 1$.

La suite de Rudin-Shapiro.

$$1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, \ldots .$$

Le n^{e} terme de cette suite-ci est égal au nombre de fois que "11" apparaît dans le développement binaire de n.

Cette suite-ci est 2-automatique.

Une suite périodique est k-automatique pour chaque k. De plus, une suite qui est ultimement périodique est k-automatique.

Soit $p, q > 1$ entiers. Nous disons que p et q sont *multiplicativement dépendants* s'il existe des entiers a, b tels que $p^a = q^b$; sinon, nous disons que p et q sont multiplicativement indépendants.

THÉORÈME: (COBHAM) Soient p et q deux entiers multiplicativement indépendants. Si une suite est p-automatique et q-automatique, alors la suite est ultimement périodique.

Le k-*noyau* d'une suite

$$\{f(n) \mid n \geq 0\}$$

est l'ensemble des sous-suites du type

$$\{f(k^a n + b) \mid n \geq 0\}$$

avec $a \geq 0$ et $0 \leq b < k^a$.

Exemple : La suite de Thue-Morse

$$0110100110010110 10010\cdots.$$

Soit $TM(n)$ le n^{e} terme de la suite de Thue-Morse. Alors,

$$TM(2n) = TM(n) \quad TM(2n+1) = 1 - TM(n).$$

Alors,

$$TM(2^a n + b) = TM(n) \qquad \forall n$$

ou

$$TM(2^a n + b) = 1 - TM(n) \qquad \forall n.$$

Le 2-noyau de la suite de Thue-Morse ne contient que deux suites : la suite de Thue-Morse et sa “renversée”.

Le k-noyau d'une suite k-automatique est fini.

THÉORÈME: Une suite est k-automatique si et seulement si son k-noyau est fini.

Allouche et Shallit ont généralisé la notion de suite automatique. Ils ont défini les suites régulières.

Regardez ! L'ensemble S des suites (complexes) est un $\mathbb{Z}$-module.

$$(1, 3, \pi, 2, 0, \ldots) + (0, 1, 1, -1, 2, \ldots)$$

$$= (1, 4, \pi + 1, 1, 2, \ldots).$$

$$3 \cdot (1, 3, \pi, 2, 0, \ldots) = (3, 9, 3\pi, 6, 0, \ldots).$$

Soit $\{f(n) \mid n \geq 0\}$ une suite. Nous construisons un $\mathbb{Z}$-module $M(f, k)$ qui est le sous-module de S engendré par les suites dans le k-noyau de $\{f(n)\}$.

Définition : Nous disons que $\{f(n)\}$ est k-*régulière* si le module $M(f,k)$ est finiment engendré.

Remarque : Une suite k-automatique est k-régulière.

Après tout. Si le k-noyau est fini, alors $M(f,k)$ est finiment engendré.

Quelques exemples.

Soit $p(x)$ un polynôme. Alors la suite $p(0), p(1), \ldots$ est k-régulière pour chaque k.

En fait, si

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

est la série de Taylor d'une fraction rationelle de rayon de convergence 1, alors $a_0, a_1, \ldots$ est k-régulière pour chaque k.

Un exemple historique ?

- En 67 Josèphe et quarante hommes étaient cernés par les Romains dans une grotte. Ils ont décidé de ne pas se rendre et de se suicider.

- Les hommes ont décidé de former un cercle. On élimine d'abord le 2-ième homme, puis ensuite le 4-ième homme. En général, nous éliminons le 2-ième suivant parmi les hommes restants.

Soit $J(n)$ la dernière personne qui meurt dans le cercle avec n personnes.

Alors, nous avons :

$$J(2n) \;=\; 2J(n) - 1$$

$$J(2n+1) \;=\; 2J(n) + 1.$$

Alors, $\{J(n)\}$ est 2-régulière.

Je devrais dire : $n = 41$,

$J(41) = 2J(20) + 1 = 2(2J(10) - 1) + 1 = 19.$

Un autre exemple.

Soit $f(n)$ le nombre de 1 dans le développement binaire de n. Alors, $f(n)$ est 2-régulière.

Pourquoi ?

$$f(2^a n + b) = f(n) + f(b).$$

Ainsi $M(f, 2)$ est engendré par

$$(f(0), f(1), \ldots)$$

et la suite constante

$$(1, 1, 1, \ldots).$$

Nous avons vu qu'il se peut qu'une suite k-régulière ne soit pas bornée. D'autre part, une suite k-automatique peut seulement prendre un nombre fini de valeurs.

THÉORÈME : Une suite k-régulière est k-automatique si et seulement si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

QUESTIONS :

Y a-t-il des analogues des théorèmes bien connus au sujet des fonctions rationelles et suites automatiques pour les suites k-régulières ?

Exemple : Y a-t-il un analogue du théorème de Cobham ?

Oui !

L'analogue correct est qu'une suite qui est p-régulière et q-régulière soit rationelle si p et q sont multiplicativement indépendants.

Il est difficile de prouver le théorème de Cobham ; heureusement, on peut ramener cette généralisation à l'original.

PRINCIPE LOCAL-GLOBAL ?

THÉORÈME : Soit $\{f(n)\}$ une suite k-régulière prenant des valeurs entières. Soit $\{g(n)\}$ une suite d'entiers. Supposons que pour une infinité de nombres premiers p il y a une suite $h_p(n) \in M(f,k)$ telle que $g(n) \equiv h_p(n) \bmod p$ for tout n. Il y a alors un entier m tels que $mg(n) \in M(f,k)$.

Pourquoi ce théorème est-il utile ?

L'idée principale est de prendre $g(n) = f(n+i)$. Si nous pouvons employer ceci pour montrer $m_i f(n+i) \in M(f,k)$ pour chaque i, alors nous pouvons conclure que f satisfait à une récurrence parce que $M(f,k)$ est finiment engendré.

REMARQUE : Notons que si $f(n)$ est k-régulière et ℓ-régulière, alors $f(n) \bmod p$ est k-automatique et l-automatique. Ainsi si k et l sont multiplicativement indépendants, alors la suite réduite est ultimement périodique par le théorème de Cobham.

Ces faits nous permettent de déduire le théorème suivant :

THÉORÈME : Soient p et q deux entiers multiplicativement indépendants. Si une suite est p-régulière et q-régulière, alors la suite est rationnelle.

Ce théorème nous permet d'identifier des suites qui sont k,ℓ-régulières, mais il n'aide pas avec les suites qui sont simplement k-régulières.