

Solution to Practice 2h

$$\begin{aligned} \mathbf{B1(a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{(1/2)R_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{-3(1 \quad 3/2)}{-3 \quad -9/2} \\ 3 \quad 2 \\ 0 \quad -11/2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \frac{-3(1 \quad 3/2)}{-3 \quad -9/2} \\ 3 \quad 2 \\ 0 \quad -5/2 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -11/2 \\ 0 & -5/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-2/11)R_2 \\ (-2/5)R_3 \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - (3/2)R_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B1(b)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{R_1 \updownarrow R_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \updownarrow R_3} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_3 - R_2 \\ R_1 - 2R_2 \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_3} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B1(c)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{R_1 \updownarrow R_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/2)R_2} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 6R_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B1(d)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 + R_1 \\ R_3 - 4R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \updownarrow R_3} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_4 - R_2 \\ R_1 - 2R_3 \\ R_2 + 5R_3 \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/6)R_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 2R_3} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_1 + R_2 \\ R_2 + 5R_3 \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B1(e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_2 \\ \\ \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - 3R_2 \\ R_1 - 2R_3 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1/2)R_3 \\ R_1 - R_2 \\ \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
& \mathbf{B1(f)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \updownarrow R_4 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 3R_2 \\ R_3 - 4R_1 \\ R_4 - 2R_1 \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \updownarrow R_4 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - 3R_2 \\ R_4 - 2R_1 \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1/3)R_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_4 + 2R_1 \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3R_4 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_4 \\ R_3 - (2/3)R_4 \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_3 \\ R_2 - 3R_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \mathbf{B1(g)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \updownarrow R_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_4 + R_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_4 - R_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_3 \\ R_2 - 2R_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$