Solution to Practice 1d

A3(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 \\ 3-1 \\ 4-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

A3(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ 1+1 \\ -6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix}$

A3(c) $-6 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-6)(4) \\ (-6)(-5) \\ (-6)(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 30 \\ 36 \end{bmatrix}$

A3(d) $-2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+(-3) \\ -2+0 \\ -2+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

A3(e) $2 \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3+1 \\ -2/3+(-2/3) \\ 4+1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ -4/3 \\ 13/3 \end{bmatrix}$

A3(f) $\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-\pi \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}+\pi \end{bmatrix}$

A5(a) $\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2+5/2 \\ 1/2-1/2 \\ 1/2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

A5(b) $2(\vec{v}+\vec{w})-(2\vec{v}-3\vec{w}) = 2\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) - \left(2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) =$

$2 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6-15 \\ 2+3 \\ 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$

A5(c)

$$\vec{w}-\vec{u}=2\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5-u_1 \\ -1-u_2 \\ -2-u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

So, lining up the components, we get that $5-u_1=6 \Rightarrow u_1=-1$, $-1-u_2=2 \Rightarrow u_2=-3$, and $-2-u_3=2 \Rightarrow u_3=-4$. Thus, $\vec{u}=\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

An alternate way to solve this would be similar to the way we would solve such an equation in $\mathbb{R}$:

$$\vec{w}-\vec{u}=2\vec{v} \Rightarrow -\vec{u}=2\vec{v}-\vec{w} \Rightarrow \vec{u}=-2\vec{v}+\vec{w}=\begin{bmatrix} (-2)(3)+5 \\ (-2)(1)+(-1) \\ (-2)(1)+(-2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Basically, the first method emphasizes the fact that each calculation is done componentwise, justifying the actions taken in the second method.

A5(d) $\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=\vec{w} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{u}=\vec{w}-\frac{1}{3}\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=2\vec{w}-\frac{2}{3}\vec{v}=\begin{bmatrix} 10-2 \\ -2-2/3 \\ -4-2/3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -8/3 \\ -14/3 \end{bmatrix}$

A6

$$\vec{PQ}=\vec{q}-\vec{p}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{PR}=\vec{r}-\vec{p}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{PS}=\vec{s}-\vec{p}=\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{QR}=\vec{r}-\vec{q}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\vec{SR} = \vec{r} - \vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

Then $\vec{PQ} + \vec{QR} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{PR}$ and $\vec{PS} + \vec{SR} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{PR}$.