



## **Analyser le risque autrement: méthodes avancées, secteur variés**

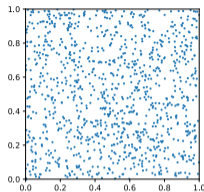
Christiane Lemieux  
Department of Statistics and Actuarial Science,  
University of Waterloo

Webinaire de Genium360  
25 mars 2026

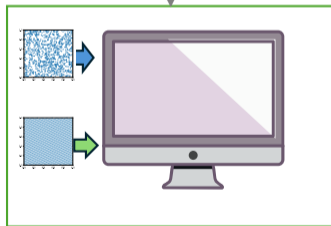
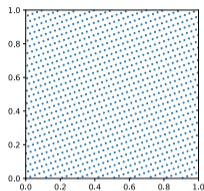
# Contexte

- ▶ **Exemple (risque financier):** quelle pourrait être la **perte** d'un portefeuille au cours de la prochaine année?
- ▶ **Modèle** pour ces éléments aléatoires ⇒ **peut générer des scénarios** ⇒ ensuite?
- ▶ **Méthode de Monte Carlo (MC):** Une **méthode versatile** pour analyser des modèles stochastiques
  - inventée pendant la 2e guerre mondiale (projet Manhattan)
  - très flexible mais **lent** pour atteindre un niveau de précision requis
- ▶ **Solution?** appliquer des méthodes pour **réduire la variabilité** des approximations obtenues par simulation de MC
  - méthodes de **quasi-Monte Carlo (QMC)** sont une alternative ayant gagné en popularité au cours des 30 dernières années
  - l'idée est de remplacer les nombres aléatoires qui génèrent des scénarios/simulations par des **nombres quasi-aléatoires**

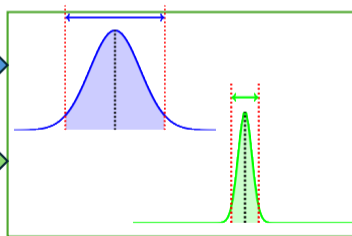
**Nombres  
aléatoires**



**Nombres  
quasi-aléatoires**



Simulation  
de modèles

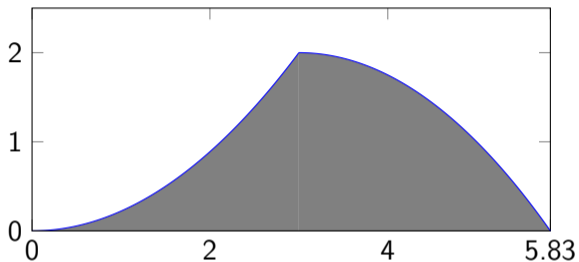


Estimé d'une mesure de  
risque ou de performance

# Plan

1. Méthodes **Monte Carlo (MC)**: comment ça fonctionne?
2. Méthodes **quasi-Monte Carlo (QMC)**, ou comment améliorer MC
3. **Application I**: gestion du risque financier
4. **Application II**: gestion du risque lié aux émissions de méthane

## 1. Méthode de Monte Carlo: version simple

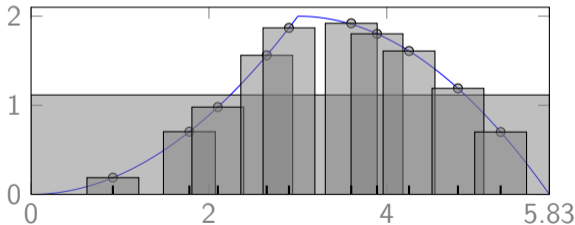


**But:** calculer l'**intégrale** d'une fonction  $h(x)$  (quand il n'y a pas de solution analytique)

# Nombres aléatoires pour calculer une intégrale

**Idée:** Choisir aléatoirement  $n$  points sur l'axe des  $x$ ; mesurer la hauteur de la fonction  $h$  à ces points (obtient  $n$  mesures  $h_1, h_2, \dots, h_n$ ); estimer l'intégrale par l'**aire d'un rectangle** dont la hauteur est la **hauteur MOYENNE** mesurée en ces points

$$\text{aire sous la courbe} \approx \text{aire rect.} = \text{base} \times \frac{1}{n}(h_1 + \dots + h_n)$$



→ Intégration de Monte Carlo

## Exemple numérique

	n = 10	n = 100	n = 1000	n = 10000	n = 100000
Monte Carlo	5.65...	5.69...	5.59...	5.73...	5.77...
Erreur	-0.12	-0.08	-0.18	-0.04	0.001

...et la valeur exacte est ...5.77124

# Méthode de Monte Carlo en général

- ▶ Beaucoup de problèmes consistent à calculer

$$E(h(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}^d} h(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

où  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  est un vecteur de  $d$  variables aléatoires décrivant un modèle,  $p(\mathbf{x})$  est sa loi de probabilité, et  $h(\mathbf{X})$  représente une quantité d'intérêt.

- ▶ **Exemple:**  $X_1$  est le prix d'une action de la compagnie ABC dans 1 semaine et  $X_2$  est le prix dans 2 semaines. Une certaine option d'achat a une valeur théorique

$$E_{X_1, X_2} \left[ \underbrace{\max \left( 0, \frac{X_1 + X_2}{2} - 50 \right)}_{\text{paiement de l'option}} \right]$$

# Simulations de Monte Carlo

Étapes pour approximer  $\mu = E(h(\mathbf{X}))$ :

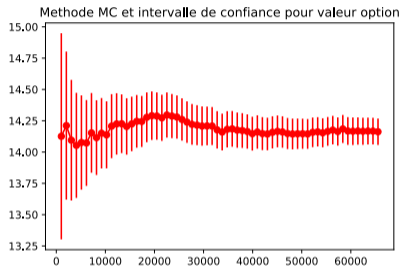
1. **Générer** un échantillon aléatoire  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  selon le **modèle** choisi, capturé par la loi de probabilité  $p(\mathbf{x})$
2. Estimer  $\mu$  par

$$\hat{\mu}_{\text{mc}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{x}_i)$$

- On peut former un intervalle de confiance pour  $\mu$  de la forme  $\hat{\mu}_{\text{mc}} \pm \Delta_n$  avec  $\Delta_n$  convergeant à la vitesse  $1/\sqrt{n}$

## Exemple en $d = 2$ dimensions

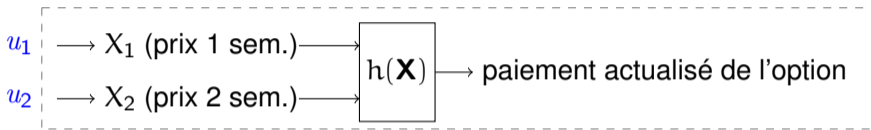
```
MCOption(n, r, T,  $\sigma$ , K,  $X_0$ )  
for  $i = 1, \dots, n$  do  
   $Z_1 \leftarrow \text{Norm01}()$  # Normale (0,1)  
   $Z_2 \leftarrow \text{Norm01}()$   
   $X_1 \leftarrow X_0 \exp(r' + \sigma'Z_1)$   
   $X_2 \leftarrow X_1 \exp(r' + \sigma'Z_2)$   
  if  $(X_1 + X_2)/2 > K$  then  
     $C_i \leftarrow e^{-rT} \left( \frac{X_1 + X_2}{2} - K \right)$  #  $h(\mathbf{X})$   
  else  
     $C_i \leftarrow 0$   
  end if  
end for  
return mean(C),std(C)
```



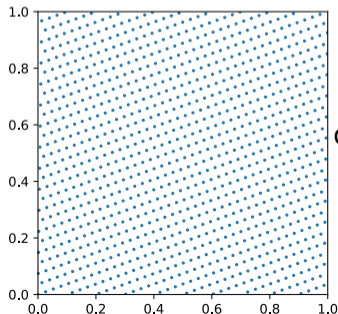
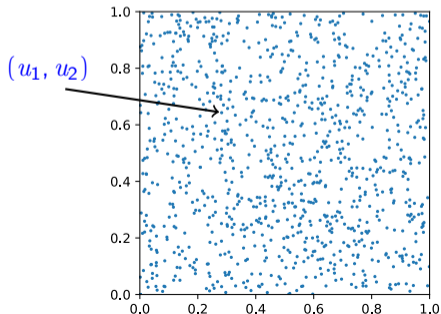
$$\mu = E(h(\mathbf{X})) = \int h(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

## 2. Méthodes quasi-Monte Carlo

Pour générer  $\mathbf{X}$ , besoin d'une source de nombres (pseudo)-aléatoires uniformes  $U(0, 1)$ .

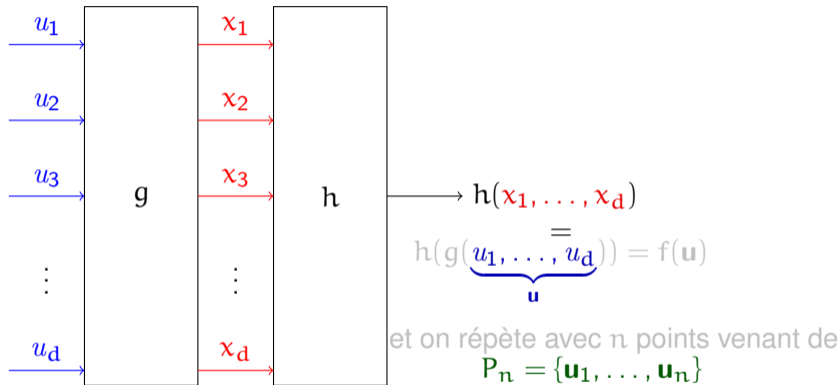


**QMC:** remplacer l'échantillon d'uniformes aléatoires par des nombres quasi-aléatoires



ensemble  $P_n$   
de  $n = 1021$  points

## Formulation du problème sous l'angle QMC



$$\mu = E(h(\mathbf{X})) = E(h(g(\mathbf{U}))) = E(f(\mathbf{U})) = \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \text{ qu'on estime par } \hat{\mu}_{\text{QMC}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{u}_i)$$

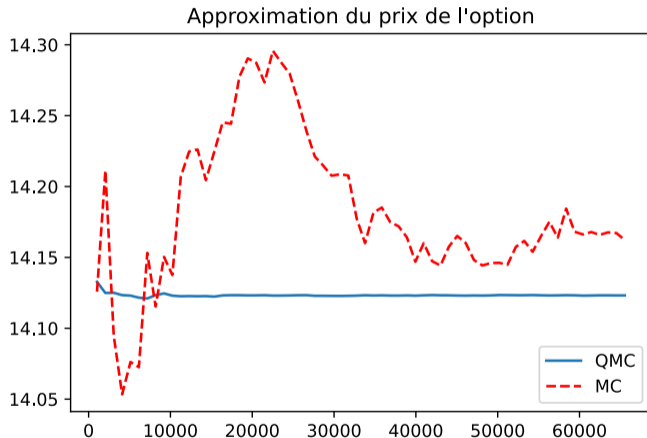
**Point clé:** on peut toujours remplacer MC par QMC mais **attention** au choix de  $g$  (et  $h$ )

## Exemple

```
MCoption(n, r, T,  $\sigma$ , K,  $X_0$ )  
for i = 1, ..., n do  
   $u_1, u_2 \leftarrow \text{Rand01}()$   
   $Z_1 \leftarrow \text{InvNorm01}(u_1)$   
   $Z_2 \leftarrow \text{InvNorm01}(u_2)$   
   $X_1 \leftarrow X_0 \exp(r' + \sigma'Z_1)$   
   $X_2 \leftarrow X_1 \exp(r' + \sigma'Z_2)$   
  if  $(X_1 + X_2)/2 > K$  then  
     $C_i \leftarrow e^{-rT}((X_1 + X_2)/2 - K)$   
  else  
     $C_i \leftarrow 0$   
  end if  
end for  
return mean(C)
```

```
QMCOption( $P_n$ , r, T,  $\sigma$ , K,  $X_0$ )  
for i = 1, ..., n do  
   $(u_{i,1}, u_{i,2}) \leftarrow i^{\text{ème}}$  point de  $P_n$   
   $Z_1 \leftarrow \text{InvNorm01}(u_{i,1})$   
   $Z_2 \leftarrow \text{InvNorm01}(u_{i,2})$   
   $X_1 \leftarrow X_0 \exp(r' + \sigma'Z_1)$   
   $X_2 \leftarrow X_1 \exp(r' + \sigma'Z_2)$   
  if  $(X_1 + X_2)/2 > K$  then  
     $C_i \leftarrow e^{-rT}((X_1 + X_2)/2 - K)$   
  else  
     $C_i \leftarrow 0$   
  end if  
end for  
return mean(C)
```

# Exemple



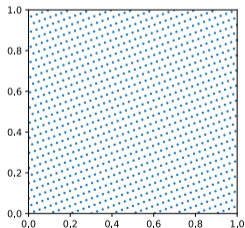
En général, l'estimateur QMC a un **erreur** qui décroît dans  $O(1/n)$  ou même  $O(1/n\sqrt{n})$  plutôt que le  $O(1/\sqrt{n})$  de MC, en autant que  $f$  est une fonction suffisamment régulière

## Points quasi-aléatoires

**Méthode 1: Règles de treillis:** on construit  $P_n$  en choisissant un vecteur d'entiers positifs  $(a_1, a_2, \dots, a_d)$  et on prend

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} (a_1, a_2, \dots, a_d) \pmod 1, i = 0, \dots, n-1 \right\}$$

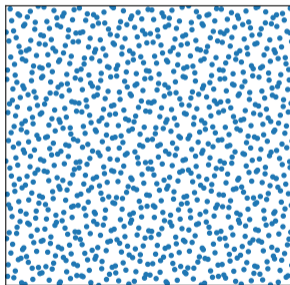
**Exemple:** avec  $n = 1021$  en  $d = 2$  dimensions, et  $a_1 = 1, a_2 = 76$



$$P_n = \left\{ (0, 0), \left( \frac{1}{1021}, \frac{76}{1021} \right), \left( \frac{2}{1021}, \frac{152}{1021} \right), \dots, \left( \frac{1020}{1021}, \frac{945}{1021} \right) \right\}$$

## Points quasi-aléatoires

**Méthode 2:** suites de Sobol' (les plus populaires). Définies directement sur les bits qui forment les chiffres entre 0 et 1 (rapide). Pas besoin de choisir  $n$  à l'avance, mais mieux de prendre  $n$  une puissance de 2. Accessible dans des bibliothèques en python ou R.



**Méthode 3:** utiliser l'IA pour construire des ensembles de points  $P_n$  optimisant une mesure d'uniformité

## RQMC ou le meilleur des deux mondes

- ▶ **QMC Randomisée (RQMC)** préserve la précision accrue de QMC mais nous donne des estimés de l'erreur comme avec MC. Comment?
- ▶ Pour un **budget de  $n$  simulations**, créer  $B$  copies indépendantes  $P_N^1, \dots, P_N^B$  d'ensembles de points RQMC  $\tilde{P}_N^b = \{\tilde{\mathbf{u}}_{i,b}, 0 \leq i < N\}$  où  $N = n/B$ .  
On obtient  $B$  **estimateurs RQMC iid**

$$\hat{\mu}_{\text{rQMC},b} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\tilde{\mathbf{u}}_{i,b}), b = 1, \dots, B$$

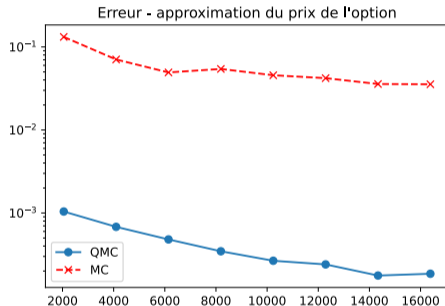
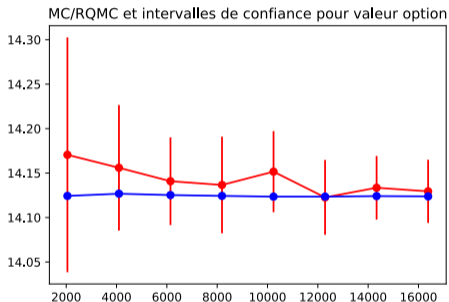
- ▶ Leur **moyenne**  $\bar{\mu}_{\text{rQMC}}$  est notre estimateur RQMC
- ▶ La **variance** de l'échantillon d'estimateurs

$$\hat{\sigma}_{\text{rQMC}}^2 = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\mu}_{\text{rQMC},b} - \bar{\mu}_{\text{rQMC}})^2.$$

permet de construire un intervalle de confiance pour  $\mu$ , **comme on le fait avec MC**

# Erreur avec RQMC – Résultats Numériques

Obtenu en faisant  $B = 20$  répétitions.

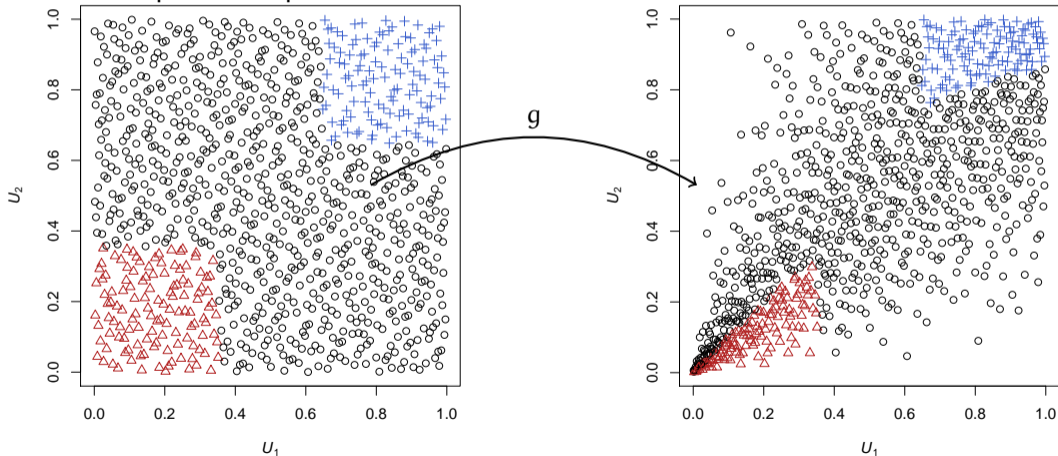


### 3. Gestion du risque financier

- ▶ Institutions financières doivent constamment évaluer le **risque de leurs portefeuilles**  
→ Quelle **perte** (\$) pourrait-on subir d'ici 1 semaine avec une **probabilité de 1%**?
- ▶ Les actifs dans ces portefeuilles **ne sont pas tous indépendants**.
  - ▶ **Crucial de modéliser cette dépendance** afin d'évaluer les scénarios "pire cas" dans lesquels un secteur entier s'effondre
  - ▶ Le régulateur demande que cette dépendance soit adéquatement modélisée (e.g., "vous prenez notre modèle ou nous démontrons pourquoi le vôtre est mieux")
- ▶ Cette **dépendance** rend la **fonction  $g$**  qui transforme les nombres  $u_1, \dots, u_d$  en observations de  $x_1, \dots, x_d$  plus **compliquée**.
- ▶ On peut utiliser les méthodes QMC même dans ces cas mais il faut **bien comprendre leur effet** dans ces applications non-traditionnelles pour s'assurer que la **fonction  $f = h(g(\cdot))$  qu'on intègre n'a pas de pathologies**

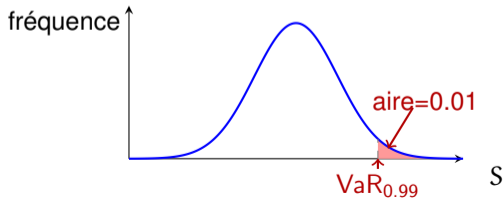
# Génération d'échantillon avec dépendance

**Gauche:**  $P_n$  QMC avec  $n = 1000$ ; **Droite:** transformation en modèle de Clayton induisant dépendance positive



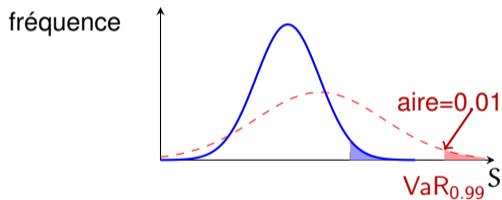
## Exemple numérique

- ▶ Portefeuille d'assurance avec  $d$  risques:  $X_j$  est le **coût (perte)** pour le  $j$ -ème risque au temps  $T$ , pour  $j = 1, \dots, d$ .
- ▶ Ces pertes suivent individuellement un modèle standard (lognormale) ou Pareto, mais **leur dépendance est modélisée par une loi Student  $t$  ou de Clayton**.
- ▶ On considère différentes fonctions de la somme  $S = X_1 + \dots + X_d$  (perte totale)
- ▶ **Valeur-à-Risque**:  $\text{VaR}_{0.99}(S) = \min\{x \in \mathbb{R} : P(S > x) \leq 0.01\}$
- ▶ **Manque à gagner prévu**:  $\text{ES}_{0.99}(S) = \frac{1}{1-0.99} \int_{0.99}^1 \text{VaR}_u(S) du$

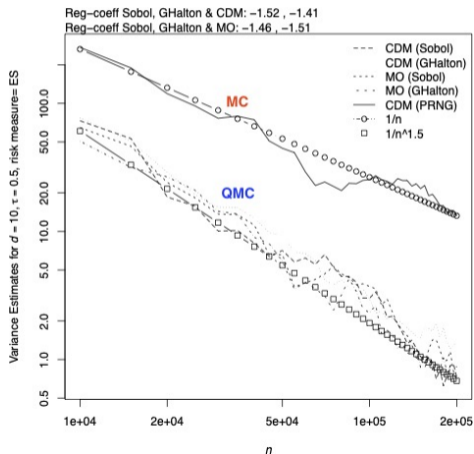
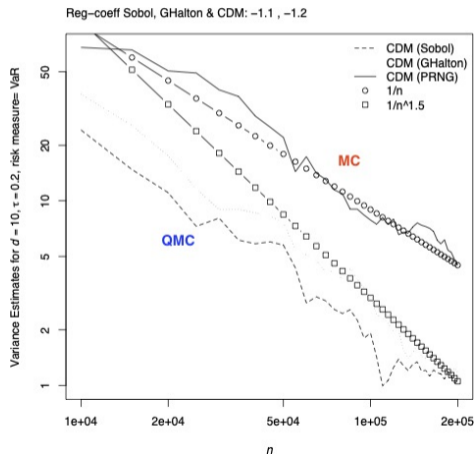


## Les mesures de risque dans les manchettes

Pourquoi les compagnies d'assurance refusent de couvrir les navires qui veulent traverser le détroit d'Ormuz?



Variance estimée pour  $VaR_{0.99}$  avec dépendance induite par Student t (gauche); pour  $ES_{0.99}$  avec loi marginale de type Pareto et dépendance de Clayton (droite) pour  $d = 10$ : QMC réduit la variance par un facteur entre 5 et 10, i.e., il faudrait 5 à 10 fois plus de simulations de MC pour obtenir la précision de QMC



## 4. Émissions de méthane: gestion du risque

- ▶ Méthane ( $\text{CH}_4$ ) est un gaz à effet de serre dont certains aspects sont pire que  $\text{CO}_2$
- ▶ Les gouvernements ont créé des réglementations pour forcer les compagnies pétrolières à mieux gérer les émissions venant de leurs installations  
→ **programmes "Leak-Detection-and-Repair" LDAR**
- ▶ Ces compagnies peuvent utiliser des **méthodes alternatives de contrôle**, repérage, et quantification seulement si elles peuvent démontrer qu'elles sont supérieures aux méthodes par défaut
- ▶ Elles doivent donc **comparer différents programmes LDAR** et ajuster certains paramètres au besoin.  
→ **utilisent MC pour faire ces comparaisons** en simulant le système (fuites, repérage, réparation, etc)

## Description du modèle



- ▶  $M = 1169$  installations pour un total de 3451 composantes
- ▶ Chaque jour, une **fuite** commence avec probabilité  $p_0$  pour chaque composante
- ▶ **Taux d'émission de la fuite** suit une loi lognormale avec des paramètres qui varient selon le type de composantes
- ▶ Modèle venant de la littérature pour:
  - ▶ Probabilité de **détecter une fuite au niveau de l'installation**; requiert de simuler la **vitesse du vent** (Weibull);
  - ▶ Probabilité de **détecter une fuite au niveau de la composante**
- ▶ **Temps de suivi** et **Temps de réparation** sont uniformes  $\mathcal{U}(d_{\min}, d_{\max})$
- ▶ **Donnée de sortie**  $h(\mathbf{X})$ : émissions cumulatives à chaque enquête (6 enquêtes réparties sur 1000 jours)  $\rightarrow \rightarrow$  **La dimension  $d$  de ce problème est  $> 10,000!$**

# Deux améliorations méthodologiques

**Deux améliorations** par rapport aux méthodes de simulation habituelles:

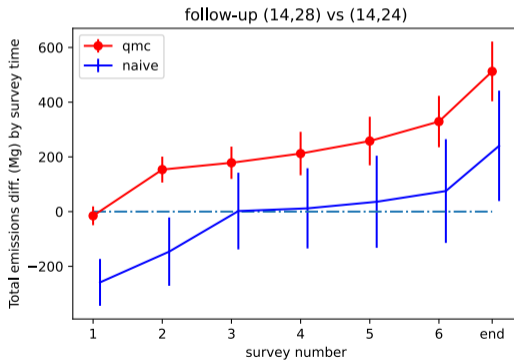
## 1 - Simulation par événement:

Au lieu de **simuler chaque jour** et générer une variable aléatoire pour déterminer si une composante commence à fuire ou non, on **génère dans combien de jours elle va commencer à fuire** → **accélère la simulation**

## 2 - Remplacer MC par RQMC

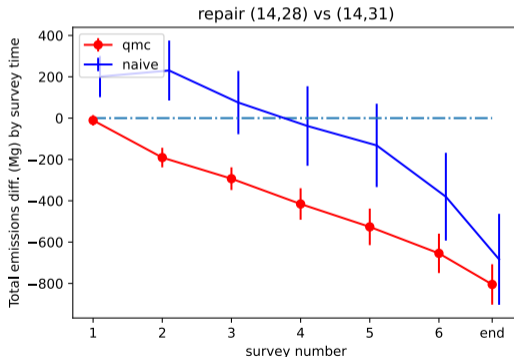
## Résultats numériques – Analyse de sensibilité

Différence estimée des émissions totales entre deux hypothèses de suivi:  $U(14, 28)$  vs  $U(14, 24)$  jours,  $p_0 = 0.01$ , temps de réparation  $U(14, 28)$ ; les intervalles de confiance au niveau 95% sont montrés basés sur un temps CPU équivalent



## Analyse de sensibilité - temps de réparation

Différence estimée des émissions totales entre deux hypothèses de temps de réparation:  $U(14, 28)$  vs  $U(14, 31)$  jours,  $p_0 = 0.0065$ , temps de suivi  $U(14, 28)$ ,  $t_0 = 10$ ; les intervalles de confiance au niveau 95% sont montrés basés sur un temps CPU équivalent



# Conclusion

- ▶ **MC** est une **méthode flexible**, utilisée dans une panoplie de domaines (finance, environnement, climat, physique, chimie, épidémiologie, infographie, etc)
- ▶ **Méthodes (R)QMC** permettent de **réduire l'erreur** en changeant le mécanisme à la base de la génération de variables aléatoires par ordinateur
- ▶ Code pour implémenter ces méthodes existe dans les langages de programmation courant (R, python)
- ▶ Si vous avez une application en tête pour laquelle vous aimeriez faire le **pas de MC à QMC**, **je serais ravie de discuter!** (plateforme Genium SONAR, email, etc)

## Remerciements

Cette recherche a été supportée par MITACS, Alberta Upstream Petroleum Research Fund (AUPRF), Clean Resources Information Network (CRIN), et le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie (ALLRP 571135-2021 et RGP 238959).

## Publications associées à la présentation

- ▶ M. Cambou, M. Hofert and C. Lemieux. Quasi-random numbers for copula models. *Statistics and Computing*, 27 (5), pp.1307–1329, 2016.
- ▶ T.K. Rusch, N. Kirk, M.M. Bronstein, C. Lemieux, D. Rus. Message-Passing Monte Carlo: Generating low-discrepancy point sets via Graph Neural Networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 121, no. 40, 2024.
- ▶ C. Lemieux, K.J. Daun, A. Wigle\*. Efficient Simulation of a Leak-Detection-and-Repair Program. *ACS ES&T Air*, Vol. 3, Issue 2, 2026.
- ▶ C. Lemieux. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling. Springer, NY, 2009.