

Substitution/Replacement

In each of the following inferences you are to choose the best answer for how the inference could be accomplished. The four choices are: **substitution**, **replacement**, **both**, **neither**.

- | | | |
|----|---|---------------------|
| 1. | $x + y \approx y + x$ | |
| | $u + v \approx v + u$ | <i>Substitution</i> |
| 2. | $x \cdot (y + z) \approx (x \cdot y) + (x \cdot z)$ | |
| | $(x + y) \cdot z \approx (x \cdot z) + (y \cdot z)$ | <i>Neither</i> |
| 3. | $x + y \approx y + x$ | |
| | $(x + y) + z \approx (y + x) + z$ | <i>Replacement</i> |
| 4. | $x \cdot y \approx u \cdot v$ | |
| | $(x \cdot y) \cdot w \approx (u \cdot v) \cdot w$ | <i>Both</i> |
| 5. | $x \cdot x \approx x$ | |
| | $(x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \approx x \cdot x$ | <i>Substitution</i> |

Find a two element **counterexample** to the following equational argument:

	$+ \begin{array}{c cc} & a & b \\ \hline a & u & u \\ b & v & v \end{array}$	
$x \cdot y \approx x$		$\cdot \begin{array}{c cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array}$
$(x + y) \cdot z \approx (x \cdot z) + (x \cdot y)$		
$x \cdot (y + z) \approx (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$u, v \in \{a, b\}$	
	$u \neq a \text{ or } v \neq b$	

Thus there are three distinct two-element counterexamples.

Find a three element **counterexample** to the following argument:

$$\frac{f^3(x) \approx x}{f^2(x) \approx x}$$

	f
a	b
b	c
c	a

Fill in the reasons for the steps in the following derivation of $(y \cdot x) + (x \cdot y) \approx 0$ from the ring axioms R1–R9 plus the idempotent law $x \cdot x \approx x$:

R1.	$x + 0 \approx x$	given
R2.	$x + (-x) \approx 0$	given
R3.	$x + y \approx y + x$	given
R4.	$x + (y + z) \approx (x + y) + z$	given
R5.	$x \cdot 1 \approx x$	given
R6.	$1 \cdot x \approx x$	given
R7.	$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$	given
R8.	$x \cdot (y + z) \approx (x \cdot y) + (x \cdot z)$	given
R9.	$(x + y) \cdot z \approx (x \cdot z) + (y \cdot z)$	given
10.	$x \cdot x \approx x$	given
11.	$(x + y) \cdot (x + y) \approx x + y$	10 Subs
12.	$(x + y) \cdot (x + y) \approx ((x + y) \cdot x) + ((x + y) \cdot y)$	R8 Subs
13.	$(x + y) \cdot x \approx (x \cdot x) + (y \cdot x)$	R9 Subs
14.	$(x \cdot x) + (y \cdot x) \approx x + (y \cdot x)$	10 Repl
15.	$(x + y) \cdot x \approx x + (y \cdot x)$	13, 14 Trans
16.	$((x + y) \cdot x) + ((x + y) \cdot y) \approx (x + (y \cdot x)) + ((x + y) \cdot y)$	15 Repl
17.	$(x + y) \cdot y \approx (x \cdot y) + (y \cdot y)$	R9 Subs
18.	$y \cdot y \approx y$	10 Subs
19.	$(x \cdot y) + (y \cdot y) \approx (x \cdot y) + y$	18 Repl
20.	$(x + y) \cdot y \approx (x \cdot y) + y$	17, 19 Trans
21.	$(x + (y \cdot x)) + ((x + y) \cdot y) \approx (x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y)$	20 Repl
22.	$((x + y) \cdot x) + ((x + y) \cdot y) \approx (x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y)$	16, 21 Trans
23.	$(x + y) \cdot (x + y) \approx (x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y)$	12, 22 Trans
24.	$(x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y) \approx (x + y) \cdot (x + y)$	23 Symm
25.	$(x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y) \approx x + y$	11, 24 Trans
26.	$(-x) + (x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y) \approx (-x) + (x + y)$	25 Repl
27.	$(-x) + x \approx x + (-x)$	R3 Subs
28.	$(-x) + x \approx 0$	R2, 27 Trans
29.	$(-x) + (x + y) \approx ((-x) + x) + y$	R4 Subs

30.	$((-x) + x) + y$	\approx	$0 + y$	28 Repl
31.	$0 + y$	\approx	$y + 0$	R3 Subs
32.	$y + 0$	\approx	y	R1 Subs
33.	$0 + y$	\approx	y	31, 32 Trans
34.	$((-x) + x) + y$	\approx	y	30, 33 Trans
35.	$(-x) + (x + y)$	\approx	y	29, 34 Trans
36.	$(-x) + ((x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y))$	\approx	y	26, 35 Trans
37.	$(-x) + ((x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y))$	\approx	$((-x) + (x + (y \cdot x))) + ((x \cdot y) + y)$	R4 Subs
38.	$((-x) + (x + (y \cdot x))) + ((x \cdot y) + y)$	\approx	$(-x) + ((x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y))$	37 Symm
39.	$(-x) + (x + (y \cdot x))$	\approx	$((-x) + x) + (y \cdot x)$	R4 Subs
40.	$((-x) + x) + (y \cdot x)$	\approx	$0 + (y \cdot x)$	28 Repl
41.	$0 + (y \cdot x)$	\approx	$y \cdot x$	33 Subs
42.	$((-x) + x) + (y \cdot x)$	\approx	$y \cdot x$	40, 41 Trans
43.	$(-x) + (x + (y \cdot x))$	\approx	$y \cdot x$	39, 42 Trans
44.	$((-x) + (x + (y \cdot x))) + ((x \cdot y) + y)$	\approx	$(y \cdot x) + ((x \cdot y) + y)$	43 Repl
45.	$(y \cdot x) + ((x \cdot y) + y)$	\approx	$((-x) + (x + (y \cdot x))) + ((x \cdot y) + y)$	44 Symm
46.	$(y \cdot x) + ((x \cdot y) + y)$	\approx	$(-x) + ((x + (y \cdot x)) + ((x \cdot y) + y))$	38, 45 Trans
47.	$(y \cdot x) + ((x \cdot y) + y)$	\approx	y	36, 46 Trans
48.	$((y \cdot x) + ((x \cdot y) + y)) + (-y)$	\approx	$y + (-y)$	47 Repl
49.	$y + (-y)$	\approx	0	28 Subs
50.	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + y + (-y)$	\approx	0	48, 49 Trans
51.	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + (y + (-y))$	\approx	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + y + (-y)$	R4 Subs
52.	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + (y + (-y))$	\approx	0	50, 51 Trans
53.	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + (y + (-y))$	\approx	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + 0$	49 Repl
54.	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + 0$	\approx	$(y \cdot x) + (x \cdot y)$	R1 Subs
55.	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + (y + (-y))$	\approx	$(y \cdot x) + (x \cdot y)$	53, 54 Trans
56.	$(y \cdot x) + (x \cdot y)$	\approx	$((y \cdot x) + (x \cdot y)) + (y + (-y))$	55 Symm
57.	$(y \cdot x) + (x \cdot y)$	\approx	0	52, 56 Trans